



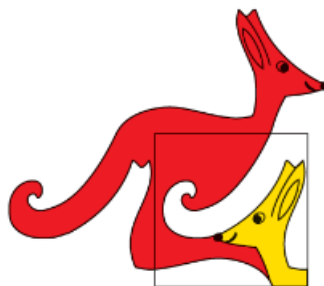
Federación Española de Sociedades  
de Profesores de Matemáticas

## XXVIII CANGURO MATEMÁTICO

Nivel 6

2.º de Bachillerato

16 de marzo de 2023





# XXVIII CANGURO MATEMÁTICO 2023

## Nivel 6

### 2º de Bachillerato

El tiempo para la realización de la prueba es de 1 hora y 15 minutos.

Hay una única respuesta correcta para cada pregunta. Cada pregunta mal contestada se penaliza con  $1/4$  de los puntos que le corresponderían si fuera correcta. Las preguntas no contestadas no se puntúan ni se penalizan. Inicialmente tienes 30 puntos.

#### Problemas de 3 puntos

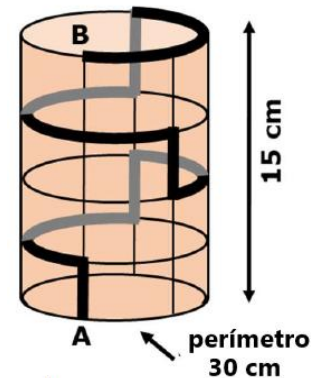
1 ¿Cuál es el valor de la expresión  $\frac{7777^2}{5555 \cdot 2222}$  una vez simplificada?

- A) 1      B)  $\frac{7}{10}$       C)  $\frac{49}{10}$       D)  $\frac{77}{110}$       E) 49

2 Julia lanza cinco dados de seis caras, obteniendo un total de 19 puntos. ¿Cuál es el número máximo de seises que podría haber sacado?

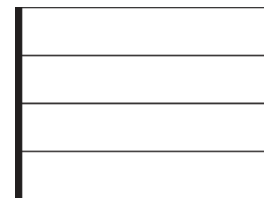
- A) 0      B) 1      C) 2      D) 3      E) 4

3 Una lata cilíndrica tiene una altura de 15 cm y el perímetro de su base circular es de 30 cm. Una hormiga camina desde el punto A en la base hasta el punto B en el techo. Su camino es verticalmente hacia arriba u horizontalmente a lo largo de arcos circulares alrededor de la lata. Su ruta se muestra con una línea más gruesa (negra para la ruta en el frente de la lata y gris en la parte posterior). ¿Cuánto mide el camino que ha recorrido la hormiga?



- A) 45 cm      B) 55 cm      C) 60 cm      D) 65 cm      E) 75 cm

4 Emma tiene 4 colores y quiere colorear la bandera rectangular con 3 bandas (ver la imagen). ¿De cuántas maneras puede hacer eso, si cada banda está coloreada con un solo color y más de una banda puede colorearse con el mismo color, pero ninguna banda adyacente puede ser del mismo color?



- A) 24      B) 27      C) 32      D) 36      E) 64

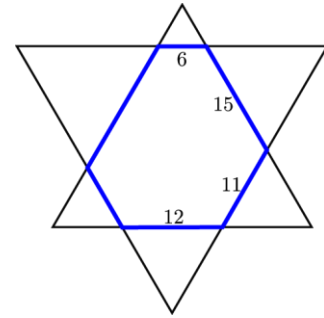
5 Llamamos "primo2" a un entero positivo  $n$ , si tiene exactamente tres divisores diferentes, el 1, el 2 y el propio  $n$ . ¿Cuántos números "primo2" diferentes hay?

- A) 0      B) 1      C) 2      D) 3      E) 4

**6** ¿Cuántos pares de enteros positivos  $x, y$  satisfacen la ecuación  $x + 2y = 2^{10}$ ?

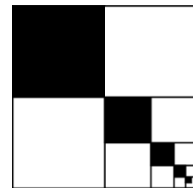
- A)  $2^9 - 1$  B)  $2^9$  C)  $2^9 + 1$  D)  $2^9 + 2$  E) 0

**7** Dos triángulos equiláteros se superponen como indica la figura, para formar un hexágono con lados opuestos paralelos. Conocemos la longitud de cuatro lados de dicho hexágono, como se muestra en la imagen. ¿Cuál es el perímetro del hexágono?



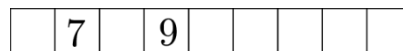
- A) 64 B) 66 C) 68 D) 70 E) 72

**8** Un cuadrado de área 84 se divide en cuatro cuadrados. El cuadrado superior izquierdo es de color negro. El cuadrado inferior derecho se vuelve a dividir en cuatro cuadrados, y así sucesivamente. El proceso se repite un número infinito de veces. ¿Qué área del cuadrado original está coloreada de negro?



- A) 24 B) 28 C) 31 D) 35 E) 42

**9.** Los números enteros del 1 al 9 se distribuirán en las 9 casillas de la imagen de modo que tres números cualesquiera en casillas consecutivas sumen un múltiplo de 3. Los números 7 y 9 ya están colocados. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden rellenar las casillas restantes?



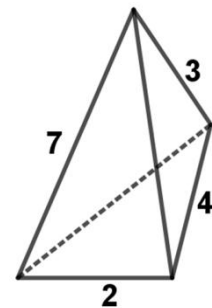
- A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 24

**10** ¿Cuál es el dígito de las unidades del producto  $(5^5 + 1)(5^{10} + 1)(5^{15} + 1)$ ?

- A) 0 B) 1 C) 3 D) 5 E) 6

**Problemas de 4 puntos**

**11** Una pirámide triangular tiene aristas cuyas longitudes son números enteros. Cuatro de estas longitudes son las que se muestran. ¿Cuál es la suma de las longitudes de las otras dos aristas?



- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 F) 13

**12** Para un entero positivo  $n$ , se define  $n!$  como el producto de todos los números enteros de 1 a  $n$ . Por ejemplo  $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ . ¿Cuál es la suma de los dígitos de  $n$  si  $n! = 6! \cdot 7!$ ?

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 9

**13** Las gráficas de las funciones  $y = x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4$  todas pasan por el mismo punto sin importar qué valor de  $a$  se elija. ¿Cuál es la suma de las coordenadas de ese punto?

- A) 2 B) 4 C) 7 D) 8 E) Ninguno de los anteriores

**14** Nos dan cinco números  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  cuya suma es  $S$ . Están relacionados por la fórmula  $a_k = k + S$  para  $1 \leq k \leq 5$ . ¿Cuál es el valor de  $S$ ?

- A)  $\frac{15}{4}$     B)  $-\frac{15}{4}$     C) -15    D) 15    E) Ninguno de los anteriores

**15** ¿Cuántos pares de enteros  $m, n$  satisfacen la desigualdad  $|2m - 2023| + |2n - m| \leq 1$ ?

- A) 0    B) 1    C) 2    D) 3    E) 4

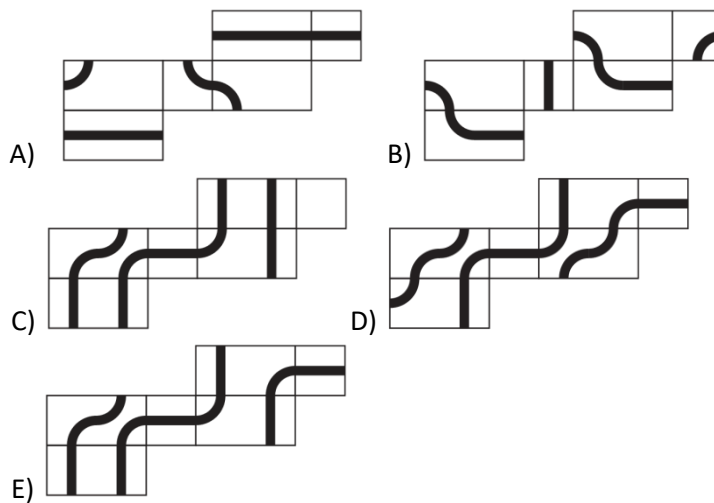
**16** En una fila de un cine están sentados 23 animales. Cada animal es un gato o un canguro. Todos tienen al menos un vecino que es un canguro. Como máximo, ¿cuántos gatos hay sentados en la fila?

- A) 7    B) 8    C) 10    D) 11    E) 12

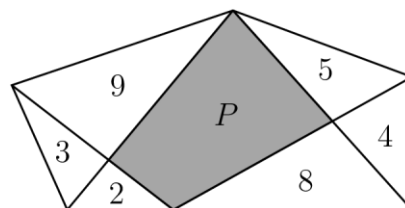
**17** Si  $5^{5^6}$  se escribe en la forma  $n^n$  para algún número natural  $n$ , ¿cuál es el valor de  $n$ ?

- A)  $5^{30}$     B)  $5^6$     C)  $5^5$     D) 30    E) 11

**18** Luis ha dibujado un camino cerrado en un prisma rectangular. ¿Qué desarrollo en el plano podría mostrar su camino?



**19** Un pentágono se divide en partes más pequeñas, como se muestra en la figura. Los números situados dentro de los triángulos indican sus respectivas áreas. ¿Cuál es el área  $P$  del cuadrilátero sombreado?



- A) 15    B)  $\frac{31}{2}$     C) 16    D) 17    E) Ninguno de los anteriores

**20** ¿Cuántos números son divisores de  $2^{20}3^{23}$  pero no lo son de  $2^{10}3^{20}$ ?

- A) 13      B) 30      C) 273      D) 460      E) Ninguno de los anteriores

**Preguntas de 5 puntos**

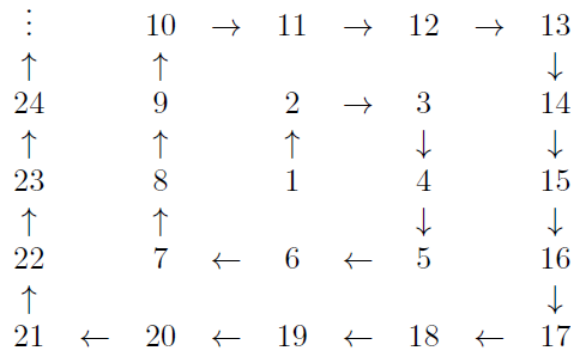
**21** Dos funciones  $f$  y  $g$  definidas en  $\mathbb{R}$  satisfacen el sistema de ecuaciones  $f(x) + 2g(1 - x) = x^2$  y  $f(1 - x) - g(x) = x^2$ . ¿Cuál es la expresión de la función  $f$ ?

- A)  $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$       B)  $x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$       C)  $-x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$   
 D)  $x^2 - 4x + 5$       E) Ninguna de las funciones anteriores

**22** En una competición, 13 escaladoras participan en tres categorías. La puntuación de cada competidor es el producto de sus clasificaciones en las tres categorías. Por ejemplo, si uno es 4.º, 3.º y 6.º, su puntaje final es  $4 \cdot 3 \cdot 6 = 72$ . Cuanto mayor sea su puntaje, menor será su clasificación general. ¿Cuál es la clasificación general más baja posible de Ana en esta competición si ocupa el primer lugar en dos de las categorías?

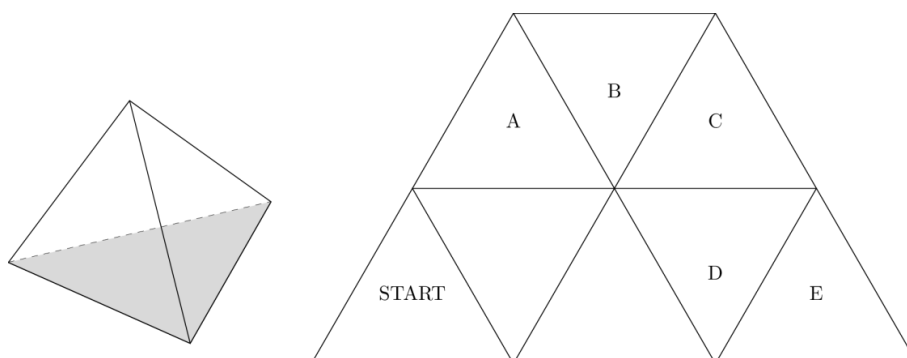
- A) Segunda      B) Tercera      C) Cuarta      D) Quinta      E) Sexta

**23** Se crea una espiral de números consecutivos, como se muestra, comenzando por el 1. Si continúa el patrón de la espiral, ¿en qué forma aparecerán los números 625, 626 y 627?



- A)  $\begin{matrix} 627 \\ \uparrow \\ 626 \\ \uparrow \\ 625 \end{matrix}$       B)  $\begin{matrix} 626 & \rightarrow & 627 \\ \uparrow \\ 625 \end{matrix}$       C)  $625 \rightarrow 626 \rightarrow 627$   
 D)  $\begin{matrix} 625 & \rightarrow & 626 \\ & & \downarrow \\ & & 627 \end{matrix}$       E)  $\begin{matrix} 625 \\ \downarrow \\ 626 \\ \downarrow \\ 627 \end{matrix}$

**24** Un bloque en forma de tetraedro regular tiene una cara sombreada.



La cara sombreada del bloque se coloca en el tablero en el triángulo con el título *START*. Luego, el bloque se hace rodar de un triángulo al siguiente girando alrededor de una arista. ¿Sobre qué triángulo se parará el bloque por primera vez sobre su cara sombreada?

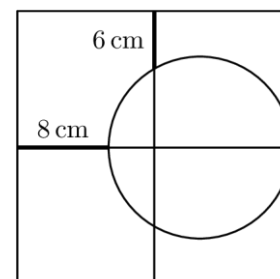
- A) A    B) B    C) C    D) D    E) E

**25** Parte del polinomio de quinto grado no se puede ver debido a una mancha de tinta. Se sabe que las cinco raíces del polinomio son números enteros. ¿Cuál es la potencia más alta de  $x-1$  que divide el polinomio?



- A)  $x - 1$     B)  $(x - 1)^2$     C)  $(x - 1)^3$     D)  $(x - 1)^4$     E)  $(x - 1)^5$

**26** El cuadrado grande de la figura se divide en cuatro cuadrados más pequeños. El círculo toca el lado derecho del cuadrado en su punto medio. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado grande? Ten en cuenta que la figura no está dibujada a escala.



- A) 18 cm    B) 20 cm    C) 24 cm  
D) 28 cm    E) 30 cm

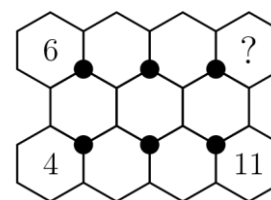
**27** ¿Cuál es el máximo común divisor de todos los números de la forma

$$n^3(n + 1)^3(n + 2)^3(n + 3)^3(n + 4)^3,$$

donde  $n$  es un número natural distinto de cero?

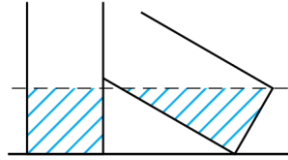
- A)  $2^9 3^3$     B)  $2^6 3^3 5^3$     C)  $2^6 3^2 5^3$     D)  $2^8 3^2 5^3$     E)  $2^9 3^3 5^3$

**28** Los números del 1 al 11 se colocan en los hexágonos vacíos para que la suma de los tres números alrededor de cada uno de los seis puntos negros sea la misma. ¿Qué número se colocará en el hexágono en la posición en la que aparece el signo de interrogación?



- A) 5    B) 4    C) 7    D) 3    E) 9

**29** Dos cilindros idénticos contienen la misma cantidad de agua. Un cilindro está derecho y el otro está apoyado contra él, y el nivel del agua en cada uno de ellos es el mismo (ver la imagen). La parte inferior de cada uno de los cilindros es un círculo con un área de  $3\pi \text{ m}^2$ . ¿Cuánta agua contiene cada cilindro?



- A)  $3\sqrt{3} \pi \text{ m}^3$     B)  $6\pi \text{ m}^3$     C)  $9\pi \text{ m}^3$     D)  $\frac{3\pi}{4} \text{ m}^3$   
 E) Es imposible calcularlo a partir de la información facilitada

**30** El producto de seis números consecutivos es un número de doce dígitos de la forma

$$abb \ cdd \ cdd \ abb,$$

donde los dígitos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son cuatro números consecutivos en algún orden.

El valor del dígito  $d$  es

- A) 1    B) 2    C) 3    D) 4    E) 5